

# Düzlemsel İşaretçiler İçin İzdüşümsel Çarpıklığın Nicelendirilmesi Quantification of Projective Distortion for Fiducial Markers

Burak Benligiray, Cihan Topal, Cüneyt Akinlar  
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü  
Anadolu Üniversitesi  
Eskişehir, Türkiye

Yakup Genç  
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü  
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü  
Kocaeli, Türkiye

**Özetçe**—Bu çalışmanın amacı, kare çerçeveli düzlemsel işaretçi tespit algoritmalarında elde edilen aday dörtgenlerin uğradığı izdüşümsel (projektif) çarpıklığı nicelemektir. Elde edilen niceliğe bağlı olarak aday dörtgenler elenebilir ve sadece bir karenin izdüşümsel dönüşümüyle çarpılmış hali olabilecek aday dörtgenler işlenebilir. Çalışmanın ilk bölümünde, bir düzlemin sonsuzdaki doğrusunun izdüşümsel bir dönüşüm sonucunda sonsuzda olmayan bir doğruya eşleşeceği gösterilmiştir. Daha sonra, sonsuzdaki doğrunun eşleştiği doğrunun denkleminin bulunması için iki yöntem önerilmiştir. İlk yöntem, belirli bir projektif dönüşümü temsil eden homografi matrisini kullanır. Bu matris kullanılarak sonsuzdaki doğrunun dönüşüm sonucu eşleştiği doğrunun denklemi elde edilmektedir. İkinci yöntemde kare işaretçi çerçevelerinin kenarlarının paralelliği kullanılarak istenilen doğru denklemi direkt bir metodla elde edilmektedir. Son bölümde elde edilen doğru denklemi kullanılarak izdüşümsel çarpıklık nicelendirilmiş ve buna bağlı bir eleme uygulaması yapılmıştır.

**Anahtar Kelimeler** — *düzlemsel işaretçiler; homografi, izdüşümsel dönüşüm.*

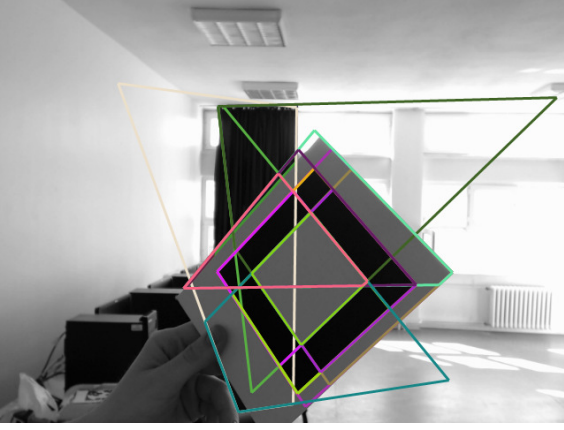
**Abstract**—The aim of this study is to quantify the projective distortion of candidate quadrilaterals found in a square-framed fiducial marker detection algorithm. Based on the quantified value, candidates can be eliminated in such a way that only the quadrilaterals that may be a projective transformation of a square remain. In the first part of the study, it is shown that under a projective transform, the line at infinity of a plane corresponds to a line that is not at infinity. Two methods to find the equation of the corresponding line are proposed. The first method uses the homography matrix that represents a particular projective transformation. The correspondent of the line at infinity can be found using this homography matrix. The second method is a direct algorithm that utilizes the parallelism of the opposing edges of the square frame. At the last section, the obtained line is used to quantify the projective distortion and an elimination is performed on this basis.

**Keywords** — *fiducial markers; homography, projective transformation.*

## I. GİRİŞ

Bilgisayarla görmenin amacı, gerçek dünyadan elde edilen izdüşümsel görüntüleri anlamak, yorumlamak ve bunlara bağlı olarak önceden tanımlanmış bir formatta kararlar vermektir. Bunun için gerçek dünyanın üç boyutlu bir modeline ihtiyaç duyulabilir. İki boyutlu görüntülerden gerçek dünyanın üç boyutlu konum bilgilerini elde etmek bilgisayarla görmenin çalışma alanlarından birisidir [1, 2].

Konum bilgisi, bir noktanın başka bir noktaya göre yerini belirtir. Bu noktalardan birinin görüntüyü elde eden kamera olduğunu kabul edersek, ikinci bir referans noktasına ihtiyaç olduğu görülür. Referans noktası olarak, tanınan ve kameradan elde edilen görüntüde tespit edilebilen bir cisim kullanılabilir. Bu, görüntünün alındığı sahnede doğal olarak bulunan bir cisim olabileceği gibi, suni olarak üretilmiş ve referans noktası elde etmek amacıyla sahneye yerleştirilmiş bir cisim de olabilir. Doğal ve modeli bilinen bir cisim referans noktası olarak kullanılacaksa, öncelikle görüntüdeki cisim ve cismin orijinali arasında SIFT [3], GLOH [4] ya da SURF [5] gibi gürbüz yerel tanımlayıcılardan biri kullanılarak eşleştirme yapılır. Bu adımda hepsi aynı güvenilirlikte olmayan pek çok eşleşme elde edilecektir. Bu çok sayıda eşleşmeden POSIT [6] ya da RANSAC [7] gibi bir algoritma ile kamera pozunu elde edilir. Vuforia ve benzeri ticari sistemler buna benzer metodlarla başarılı sonuçlar vermektedir [8, 9]. Bu yöntemin avantajı, sahneye ekstradan bir cisim koymaya ihtiyaç duymadan kamera pozunu hesaplanabilmesidir. Bununla birlikte, yüksek hassasiyet ve düşük işlem zamanı gerektiren uygulamalarda suni referans cisimlerinin kullanılması daha uygun olacaktır. Bu cisimlerden en yaygın kullanılanlar ARTag [10] ve ARToolkit [11] gibi düzlemsel işaretçilerdir. Görüntüdeki işaretçilerde az sayıda ve güvenilir noktalar orijinal noktalarla eşleştirilebilir ve Abidi, Chandra'nın çalışması [12] ve Quan, Lan'ın çalışması [13] benzeri dört nokta kullanan bir metodla kamera pozunu hesaplanabilir. Bu işaretçilerde bulunan dört noktanın konumları piksel-altı hassasiyette bulunur ve kamera pozunu hesaplayan metod az sayıda nokta kullanacağı için gereken işlem gücü daha az



Şekil 1. İşaretçi tespitinde kullandığımız dörtgen tespit algoritmamızın sonucunda elde edilen aday dörtgenler. Her bir dörtgen farklı bir renkle çizilmiştir.

olacaktır. Bu nedenlerle bazı uygulamalarda suni işaretçiler, doğal referans cisimlerine tercih edilir [14, 15].

ARTag, ARToolkit ve literatürde bulunan diğer pek çok kare çerçeveli düzlemsel işaretçi önce görüntüde aday dörtgenleri bulur (Şekil 1), daha sonra bu dörtgenlerin içine gömülmüş kodu okuyarak onların gerçekten bir işaretçi olup olmadıklarına karar verir. İşaretçilerin çerçeveleri perspektif izdüşüm nedeniyle çarpılmaya uğrayacak ve biçimsel olarak kareye benzemeyeceklerdir. Çalışmamızda uyguladığımız çerçeve tespit algoritması ARTag'de olduğu gibi doğru parçası tespitiyle başlar. Bunun için gerçek zamanlı bir doğru parçası tespit algoritması olan EDLines kullanılmıştır [16]. Daha sonra bu doğru parçaları, bütün kapatma durumlarını ele alabilmek için doğru parçalarının kesişmediği dörtlü kombinasyonlar şeklinde gruplanmışlardır. Sonraki aşama, bu dört doğru parçasından oluşan aday dörtgenlerin elenmesi olacaktır. İşaretçi literatüründe dörtgen eleme, genelde ayrıntıları belirtilmeyen bulgusal yöntemlerle yapılmaktadır. Elenmeyen hatalı aday dörtgenler işlem süresini uzatacak ve hatalı pozitif tespit riskini artıracaktır; fakat doğru aday dörtgenleri elemek hatalı negatif tespite yol açacaktır. Bu nedenle güvenilir bir aday dörtgen eleme metodu uygulamak düzlemsel işaretçi tespit algoritmalarının performansını artıracaktır.

## II. DÜZLEMSEL İZDÜŞÜMSSEL DÖNÜŞÜMLERDE SONSUZDAKİ DOĞRU

Bilgisayarlı görme uygulamalarında Kartezyen koordinatlar yerine homojen koordinatlar kullanılır. Bu, üç boyutlu dünyanın iki boyuttaki izdüşümünün analizinde kolaylık sağlayan izdüşümsel geometrinin bir ürünüdür [17]. Homojen koordinatların Kartezyen koordinatlardan farkı, sonsuzdaki noktaların da sonsuzda olmayan noktalara benzer bir şekilde modellenebilmesidir. Bu nedenle kullanılan metodlar daha simetrik ve sade hale gelir ve cebirsel işlemleri uygulamak kolaylaşır.

Öklid geometrisinde iki paralel doğru kesişmez. Bu durum, iki paralel doğrunun sonsuzdaki bir noktada kesiştiği şeklinde de yorumlanabilir, bu nokta ise homojen koordinatlarla ifade edilir.  $\mathbf{l}_1 = [a \ b \ c_1]^T$  ve  $\mathbf{l}_2 = [a \ b \ c_2]^T$  homojen koordinatlarla ifade edilmiş iki

paralel doğru olsun. Eş. 1'de bu paralel doğrulara çapraz çarpım ( $\times$ ) uygulanmış olup,  $\mathbf{p}$  bu doğruların kesişim noktasını gösterir.

$$\mathbf{p} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 = \begin{bmatrix} b(c_2 - c_1) \\ a(c_1 - c_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eş. 1})$$

Eş. 1'deki sonuçta homojen koordinatların üçüncü boyutunun sıfır olduğunu görüyoruz. Bu durum, noktanın sonsuzda bulunduğunu göstermektedir.

Düzlemsel izdüşümsel dönüşümler, homografi matrisi denilen,  $3 \times 3$ 'lük tekil olmayan bir matris ile ifade edilebilir. Bir düzlemin dönüşümü için bu matris elde edildiğinde, orijinal düzlemdeki noktalar ve doğrular, dönüşüm geçirmiş düzlemdeki noktalar ve doğrularla eşleştirilebilir.

Düzlemsel dönüşümlerin hepsi aynı derecede değişkenlik yaratmaz. Öklid dönüşümleri düzlemdeki uzunlukları ve alanları korurken benzerlik dönüşümü sadece uzunlukların oranlarını ve açıları korur. Afin dönüşümler doğruların paralelliklerini korurken izdüşümsel dönüşüm sayılan hiçbir özelliği korumaz [1-sf.44]. İğne deliği kamera modeli izdüşümsel dönüşüm öngördüğü için, neredeyse her özelliğin değiştiği bu dönüşüm tipi araştırmacıların ağırlıklı çalışma alanıdır. Bir düzlemsel dönüşüm homografi ile temsil edilebilir [17].

## III. SONSUZDAKİ DOĞRUNUN DÖNÜŞÜMÜNÜN TESPİTİ

### A. Homografi Matrisi Kullanan Metod

Afin dönüşümde paralellik korunurken izdüşümsel dönüşümde korunmadığından bahsettik. Öyleyse, önceden sonsuzda kesişen doğrular artık sonsuzda olmayan bir noktada kesişecektir. Benzer bir şekilde homografi matrisinin doğruları doğrularla eşleştirebildiğinden bahsetmiştik. Sadece bir izdüşümsel dönüşümü ifade eden homografi matrisinin sonsuzdaki doğruyu dönüşüme uğramış düzlemdeki sonsuzda olmayan bir doğruya eşleştirebilmesi de bu durum yüzündendir. Orijinal düzlemdeki noktalar  $\mathbf{p}$ , dönüşüm geçirmiş düzlemdeki noktalar  $\mathbf{p}'$  olsun. Eş. 2'de dönüşüm geçirmiş düzlemi orijinal düzleme eşleştiren  $H$  matrisini kullanarak sonsuzdaki doğrunun dönüşümünün nasıl bulunabileceği gösteriliyor.

$$H\mathbf{p}' = \mathbf{p}$$

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eş. 2})$$

$$H_{31}x' + H_{32}y' + H_{33} = 0$$

### B. Sonsuzdaki Noktaları Kullanan Metod

Karenin karşılıklı kenarları birbirlerine paraleldir ve sonsuzdaki doğrunun üzerindeki iki ayrı noktada kesişir. Sonsuzdaki doğrunun izdüşümsel dönüşüm ile sonsuzda olmayan bir doğruya denk geleceğinden bahsetmiştik. Bu doğrunun denklemini ise düzlemin geçirdiği dönüşümü ifade eden homografi matrisinin elemanlarını kullanarak Eş. 2'de bulmuştuk. Orijinal şeklimiz bir kare olduğu için sonsuzdaki doğrunun dönüşümünün yerini bulmanın daha basit bir yolu vardır. Sonsuzdaki doğrunun üzerinde olan iki noktanın

dönüşümlerini bulursak, bu noktaların dönüşümleri üzerinden geçen doğru da sonsuzdaki doğrunun dönüşümünü bulmamızı sağlayacaktır. Eş. 3 bir izdüşümsel dönüşüme ait homografi matrisinin noktaları ve doğruları nasıl eşleştirdiğini gösteriyor [1-sf.36].

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= H\mathbf{p} \\ \mathbf{l}' &= H^{-T}\mathbf{l} \end{aligned} \quad (\text{Eş. 3})$$

Eş. 3'ü kullanarak sonsuzdaki doğrunun dönüşümünü Eş. 4'teki gibi ifade edebiliriz.

$$\mathbf{l}'_{\infty} = H^{-T}\mathbf{l}_{\infty} = H^{-T}(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2) \quad (\text{Eş. 4})$$

Çarpaz çarpımın dönüş (rotasyon) altında sabit olmasının bütün dönüşümlere genişletilmiş hali olan Eş. 5'i [18] ve Eş. 3'ü kullanarak Eş.4'ten Eş.6'ya ulaşabiliriz.

$$\det(C) C^{-T}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (C\mathbf{a}) \times (C\mathbf{b}) \quad (\text{Eş. 5})$$

$$\mathbf{l}'_{\infty} = \frac{1}{\det(H)} \det(H) H^{-T}(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2)$$

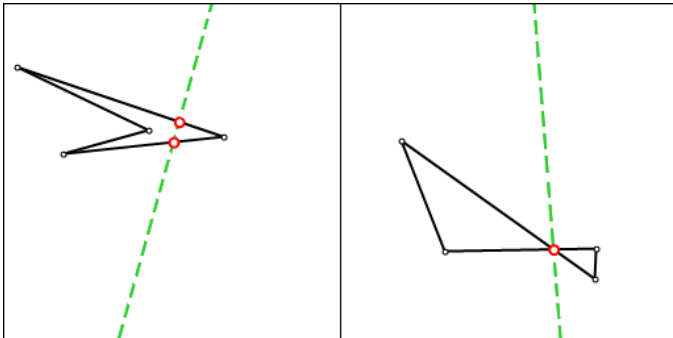
$$\dots = \frac{1}{\det(H)} (H\mathbf{p}_1 \times H\mathbf{p}_2) = \frac{1}{\det(H)} (\mathbf{p}'_1 \times \mathbf{p}'_2) \quad (\text{Eş. 6})$$

Eş. 6, sonsuzdaki doğrunun dönüşümünün sonsuzdaki doğrunun üzerindeki noktaların dönüşümleri kullanılarak bulunabileceği gösteriliyor. Homojen koordinatlar sabit ölçekli olduğu için sondaki  $\frac{1}{\det(H)}$  elemanın önemi yoktur. Bu metod ile aranan doğru homografi hesaplanmadan elde edilmiştir. Bir sonraki kısımda her bir hipotezin kendine ait doğruyla nasıl test edilebileceğini göstereceğiz.

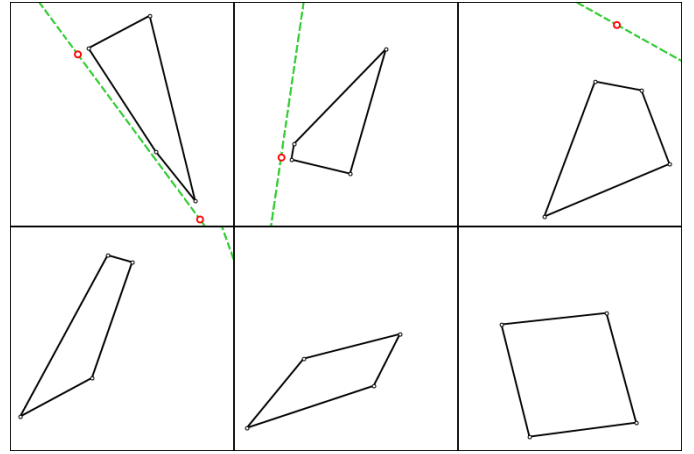
#### IV. SONSUZDAKI DOĞRUNUN DÖNÜŞÜMÜNÜN KULLANILMASI

Sonsuzdaki doğrunun dönüşümünü bulduktan sonra bu doğru kullanılarak aday dörtgenler elenmelidir. Bu aşamada ölçek olarak sonsuzdaki doğrunun dönüşümü ile şekil arasındaki en küçük uzaklık alınmıştır. Bir çokgenin her bir kenarı bir doğru parçası olması ve bir doğru parçasının kendisini kesmeyen bir doğruya en yakın noktasının iki ucundan biri olması sebebiyle bir çokgenin bir doğruya olan en küçük uzaklığını sadece bütün köşelerini test ederek bulabiliriz.  $\mathbf{p}_i$  dörtgenin köşelerinden biri olmak şartıyla kullanılan yöntem Eş. 7'deki gibidir.

$$\text{uzaklık} = \min(U_{i=1}^4 \mathbf{l}'_{\infty}{}^T \mathbf{p}_i) \quad (\text{Eş. 7})$$



Şekil 2. Sonsuzdaki doğrunun dönüşümünün, karenin dönüşümünü kestiği durumlarda oluşan içbükey dörtgen ve basit olmayan dörtgen.



Şekil 3. Sonsuzdaki doğrunun dönüşümüne sırayla 6, 12, 52, 110, 301, 3737 piksel uzaklığındaki dörtgenler. Kesikli yeşil çizgi sonsuzdaki doğrunun dönüşümünü, bu çizginin üzerindeki kırmızı noktalar karşılıklı kenarların kesişim noktalarını göstermektedir.

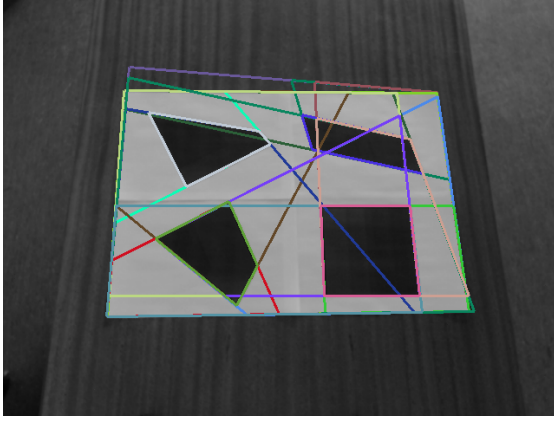
Dönüşümden önce sonsuzdaki doğrunun kareye uzaklığı tanım gereği sonsuzdur. Dönüşümden sonra da doğrunun dörtgene uzaklığı sonsuz ise bu dönüşüm bir afin dönüşümdür; zira afin dönüşüm, sonsuzdaki doğruyu sonsuzda olmayan bir konuma taşıyamaz. Diğer uç durum ise doğrunun dörtgene uzunluğunun sıfır olması, yani sonsuzdaki doğrunun dönüşümünün karenin dönüşümü olan dörtgeni kesmesidir. Bu durumda ortaya içbükey basit bir dörtgen ya da basit olmayan bir dörtgen çıkar (Şekil 2). Bu şekillerin, kare bir cismin perspektif etkisiyle çarpılmış hali olamayacağı kesindir; fakat bu özel durumları elemek için basit bir dışbükeylik testi yeterli olacaktır.

Sonsuzdaki doğrunun dönüşümüne uzaklığın sonsuz olması perspektif bir çarpılma olmadığını, sıfır olması ise makul olmayan (sonsuz) bir çarpılmanın olduğunu gösteriyorsa, aradaki değerler de düzlemsel biçimin perspektif etkisiyle ne kadar çarpıldığını ifade edecektir. Dörtgenin farklı uzaklık değerlerine bağlı olarak nasıl çarpıldığını Şekil 3'te görebilirsiniz.

İzdüşümsel çarpılmanın miktarı; işaretçinin büyüklüğü, işaretçinin kameraya uzaklığı ve kameranın odak uzaklığına bağlı olacaktır. İşaretçi büyüklüğü ve odak uzaklığı sabittir, işaretçinin kameraya uzaklığı ise belirli bir miktardan az olamaz. Bu durumda belirli bir kamera ve işaretçi için kare çerçevenin uğrayabileceği çarpılma sınırlıdır. Öyleyse bu sınırdan daha fazla çarpılmaya uğramış aday dörtgenleri gerçek bir işaretçinin aday dörtgenini eleme riski olmadan eleyebiliriz.

Şekil 4'te bir kare, bir paralelkenar ve iki özel olmayan dörtgen vardır. Kapatmaya dayanıklı algoritmamız bazı kenarların kapatılmış olabileceğini göz önünde bulundurarak çok sayıda aday dörtgen elde etmiştir. Bu dörtgenlerden bir kısmı bir karenin dönüşümü olamayacak kadar çarpıktır. Bu dörtgenleri elemeye çalışacağız.

Sağ alttaki kare şekli işaretçinin çerçevesini, diğer üç şekil ise sahnedeki işaretçi olmayan çeşitli geometrik şekilleri temsil ediyor. Uygulamamızda kareyi temsil eden dörtgenin elenmemesini, aday dörtgenlerden büyük miktarının elenmesini



Şekil 4. Kapatmaya dayanlı dörtgen tespit algoritmamızın sonucu. Şekilde ayrı renklerde çizdirilmiş 22 dörtgen vardır, renkli resime başvurunuz.

bekliyoruz. Aday dörtgenlerin çoğunun elenmesi ve geriye kalan dörtgenlerin şekilde rahat bir şekilde görülebilmesi için yüksek bir eşik olan 10.000 pikseli seçiyoruz. Bu demek oluyor ki sonsuzdaki doğrunun dönüşümüne 10.000 pikselden daha yakın olan dörtgenler elenecektir.

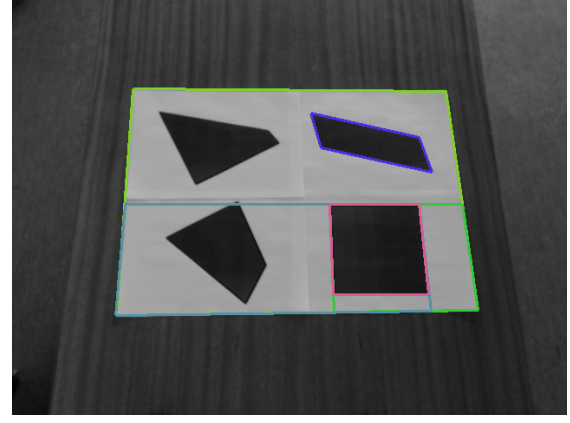
Şekil 5'te beklediğimiz üzere sadece çok az çarpılmaya uğramış, kenarları neredeyse paralel olan dörtgenleri elde ediyoruz. Aday dörtgen tespiti 2.2 GHz hızlı işlemciye sahip bir bilgisayarda yaklaşık 10 ms, çalışmamızda önerdiğimiz metodun uygulanması ise 0.25 ms altında sürmektedir.

Burada önerilen elemler bulgusal metodlar yardımıyla da gerçekleştirilebilir. Örneğin, iki doğru arasındaki açı için en düşük ve en büyük eşikler konulabilir. Bu çalışmada önerilen çözüm bunları kapsamakla birlikte daha zarif bir metoddur. Benzer analizler hareketten inşa (structure from motion) veya çoklu görüş geometrisi (multiple view geometry) problemlerinde, özellikle kirallik (cheirality) kısıtı [19] olarak gözlemlenmiştir.

## V. SONUÇ

İzdüşümsel bir dönüşüm sonucu sonsuzdaki doğrunun eşleştiği doğrunun denkleminin bulunması için direkt bir metod önerilmiştir. Bu metod, orijinal düzlemde iki paralel doğru çiftinin bilinmesini gerektirmektedir. Bu paralel doğru çiftleri, düzlemsel işaretçi çerçevesini oluşturan karenin karşılıklı kenarlarıdır. Gürültünün hesaba katılmadığı bir ortamda, belirli odak uzaklığına sahip bir kamera için bir işaretçinin izdüşümsel çarpıklığının üst sınırı olacaktır. Bu üst sınırdan daha çarpık olan aday dörtgenler elenerek sadece gerçekten bir işaretçinin dönüşümü olabilecek dörtgenler için işaretçi algoritmasının sıradaki adımları yürütülebilir. Bu sayede işaretçi algoritmasının hızı artacak ve hatalı pozitif sonuçlar azalacaktır.

Homografi matrisine dayalı yöntem sonucu elde edilen sonsuzdaki doğrunun dönüşümü denklemi ise, üzerinde iki paralel doğru çifti olmayan bir düzlemin dönüşümünün izdüşümsel çarpıklığını nicelendirme amacıyla kullanılabilir. Sonraki çalışmalarımızda bu bildirideki analizin model tabanlı görüş uygulamalarındaki kullanımı ve işaretçi tespit uygulamalarındaki pratik etkisi incelenecektir.



Şekil 5. Elde edilen aday dörtgenlerin izdüşümsel çarpıklığa göre elenmesi sonucu kalan 6 dörtgen.

## REFERANSLAR

- [1] Hartley, R; Zisserman, A.; , *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, 2000.
- [2] Forsyth, D.A.; Ponce, J.; , *Computer Vision: A Modern Approach*. Prentice Hall, 2011.
- [3] Lowe, D.G.; , "Object recognition from local scale-invariant features," *Computer Vision, 1999. The Proc. of the Seventh IEEE Int'l Conf. on*, vol.2, pp.1150-1157, 1999.
- [4] Mikolajczyk, K.; Schmid, C.; , "A performance evaluation of local descriptors," *PAMI, IEEE Trans. on*, vol.27, no.10, pp.1615-1630, 2005.
- [5] Bay, H.; Ess, A.; Tuytelaars, T.; Van Gool, L.; , "Speeded-up robust features (surf)" *Computer Vision and Image Understanding*, vol.110, no.3, pp.346-359, 2008.
- [6] Dementhon, D.F.; Davis, L.S.; , "Model-based object pose in 25 lines of code" *International Journal of Computer Vision*, vol.15, no.1-2, pp.123-141, 1995.
- [7] Fischler, M.A.; Bolles, R.C.; , "Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography," *Comm. of the ACM*, vol.24, no.6, pp.381-395, 1981.
- [8] Vuforia. <http://www.qualcomm.com/solutions/augmented-reality/>
- [9] Junaio. <http://www.junaio.com/>
- [10] Fiala, M.; , "ARTag, a fiducial marker system using digital techniques," *CVPR, IEEE Computer Society Conf. on* , vol.2, pp. 590- 596, 2005.
- [11] Kato, H.; Billinghurst, M.; , "Marker tracking and HMD calibration for a video-based augmented reality conferencing system," *Augmented Reality, Proc. 2nd IEEE and ACM Int'l Workshop on* , pp.85-94, 1999.
- [12] Abidi, M.A.; Chandra, T.; , "A new efficient and direct solution for pose estimation using quadrangular targets: algorithm and evaluation," *PAMI, IEEE Trans. on* , vol.17, no.5, pp.534-538, 1995.
- [13] Long Quan; Zhongdan Lan; , "Linear N-point camera pose determination," *PAMI, IEEE Trans. on* , vol.21, no.8, pp.774-780, 1999.
- [14] Xiang Zhang; Fronz, S.; Navab, N.; , "Visual marker detection and decoding in AR systems: a comparative study," *ISMAR Proc.*, pp. 97-106, 2002.
- [15] Fiala, M.; , "Comparing ARTag and ARToolkit Plus fiducial marker systems," *Haptic Audio Visual Environments and their Applications , IEEE Int'l Workshop on* , 2005.
- [16] Akinlar, C.; Topal, C.; , "Edlines: Real-time line segment detection by Edge Drawing (ed)," *ICIP, IEEE Int'l Conf. on* , pp.2837-2840, 2011.
- [17] Faugeras, O.; Luang, Q.T.; Papadopoulos, T.; , *The Geometry of Multiple Images: The Laws That Govern The Formation of Images of A Scene and Some of Their Applications*. MIT Press, 2001.
- [18] Strang, G.; , *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley Cambridge Press, 2009.
- [19] Hartley, R.I.; , "Cheirality invariants," *In Proc. Darpa Image Understanding Workshop* , pp. 745-753, 1993.